Theorie 1

Trillingen: Afleiding formules voor uitwijking, snelheid en versnelling

De formule van een trilling

In dit theorieblad leer je hoe de formule eruit ziet van een harmonische trilling.

De formule voor de plaatst van een trilling ziet er als volgt uit:

$$u(t) = A \cdot sin(2\pi \cdot f \cdot t) = A \cdot sin(\omega \cdot t) \qquad [1]$$

In deze formule is:

$u(t)$ de uitwijking/positie van het blok of het deeltje

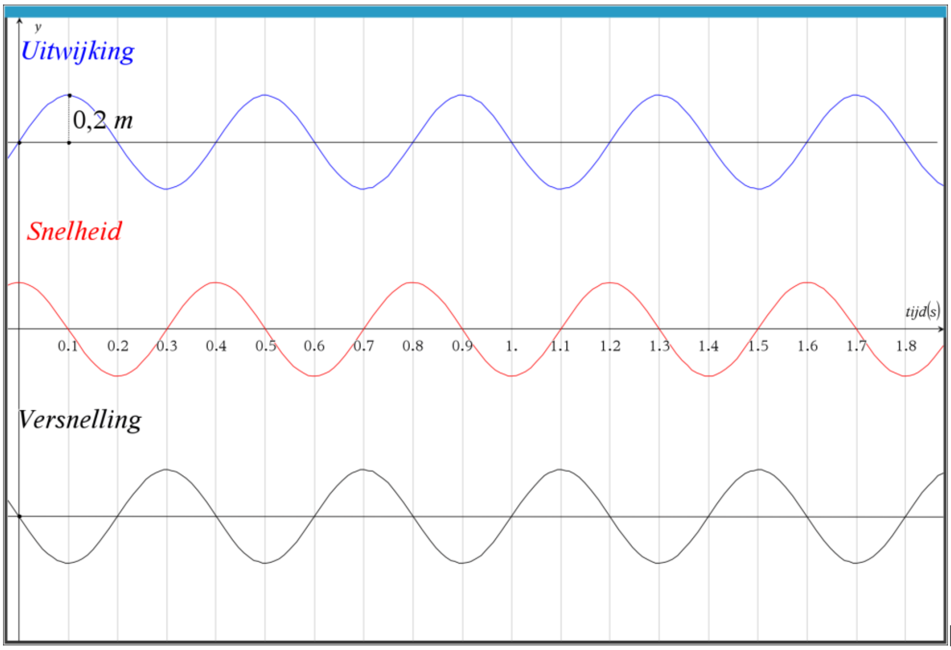
A = de amplitude (in m)

f = de frequentie (in Hz)

t = de tijd (in s)

$\omega = 2\pi \cdot f = \frac{2\pi}{T}$ = de hoeksnelheid (in radialen/s)

Het geheel tussen de haakjes ($2\pi \cdot f \cdot t = \omega \cdot t$) wordt de fase genoemd. Dit geeft aan waar je bent in de trilling. Je kunt dit berekenen door de hoeksnelheid ω te vermenigvuldigen met de tijd.



Hieronder staan de diagrammen die behoren bij een trilling met een amplitude van 0,2 m en de trillingstijd is 0,4 s (geeft een frequentie van 2,5 Hz). Met deze gegevens kunnen je de formule voor de uitwijking opstellen:

$$u(t) = 0{,}2 \cdot sin(2\pi \cdot 2{,}5 \cdot t) = 0{,}2 \cdot sin(15{,}7 \cdot t)$$

Met 15,7 in rad/s en 0.2 in m.

De formule van de snelheid kun je krijgen door de afgeleide te nemen van de formule voor de plaats. Bij mechanica heb je geleerd dat de helling in het (x,t) diagram de snelheid geeft. De helling van een formule is de afgeleide.

Dit geeft de volgende formule voor de snelheid:

$$\begin{aligned} v(t) &= A \cdot 2\,\pi \cdot \mathrm{f} \cdot cos(2\pi \cdot f \cdot t) \\ &= 0{,}2 \cdot 2\pi \cdot 2{,}5 \cdot cos(2\pi \cdot 2{,}5 \cdot t) \\ &= \pi \cdot cos(2\pi \cdot 2{,}5 \cdot t) \\ &= \pi \cdot cos(15{,}7 \cdot t) \end{aligned}$$

Je krijgt deze formule door de kettingregel toe te passen. Uit bovenstaande formule blijkt dat de maximale snelheid gelijk is aan:

$$v_{max} = A \cdot 2\pi \cdot f = \frac{2\pi \cdot A}{T} = \omega \cdot A$$

Op dezelfde manier kunnen we door nogmaals differentiëren de formule afleiden voor de versnelling. Je moet dan de afgeleide nemen van de formule voor de snelheid.

$$a(t) = -A \cdot (2\pi)^2 \cdot f^2 \cdot sin(2\pi \cdot f \cdot t) = -A \cdot 4\pi^2 \cdot f^2 \cdot sin(2\pi \cdot f \cdot t) \qquad [2]$$

Dit geeft voor de maximale versnelling:

$$a_{max} = A \cdot 4\pi^2 \cdot f^2 = \frac{A \cdot 4\pi^2}{T^2} = \omega^2 \cdot A$$

Vergelijk formule 1 en 2. Je ziet dat een groot deel overeenkomt:

$$\begin{aligned} a(t) &= -A \cdot (2\pi)^2 \cdot f^2 \cdot sin(2\pi \cdot f \cdot t) \\ &= -\,(2\pi)^2 \cdot f^2 \cdot A \cdot sin(2\pi \cdot f \cdot t) \\ &= -\,(2\pi)^2 \cdot f^2 \cdot \mathrm{u(t)} \end{aligned}$$

Dit betekent dat de versnelling recht evenredig is met de uitwijking maar wel met een tegengesteld teken (zie ook figuur vorige pagina). De kracht is echter ook recht evenredig met de versnelling. Dit betekent dat de kracht ook recht evenredig is met de uitwijking maar ook met een tegengesteld teken:

$$F(t) = -C \cdot u(t) \text{ met } C = 4\pi^2 \cdot \mathrm{m} \cdot f^2 = \frac{m \cdot 4\pi^2}{T^2} = m \cdot \omega^2 \qquad [3]$$

Deze relatie geldt alleen als de trilling een harmonische trilling is. Hij geldt ook anders om: als de kracht recht evenredig is aan de uitwijking maar met een tegengesteld teken dan is het een harmonische trilling.

Opdrachten

1. Toon aan dat de hoeksnelheid ω gelijk is aan 15,7 rad/s
2. Toon aan dat $v_{max} = 3{,}14\ m/s$ en dat $a_{max} = 49{,}3\ m/s^2$
3. Toon aan dat de maximale versnelling gelijk is aan $\omega^2 \cdot A$
4. Bereken de plaats, snelheid en versnelling op t=0,30 s. (Zorg ervoor dat je rekenmachine in radialen staat). Controleer in de figuur op de vorige pagina.
5. Toon aan dat ook op t=0,30 s geldt dat $a(0{,}30) = -\,\omega^2 \cdot u(0{,}30)$
6. Leidt af uit formule 3 de formule voor de trillingstijd van een massa-veersysteem